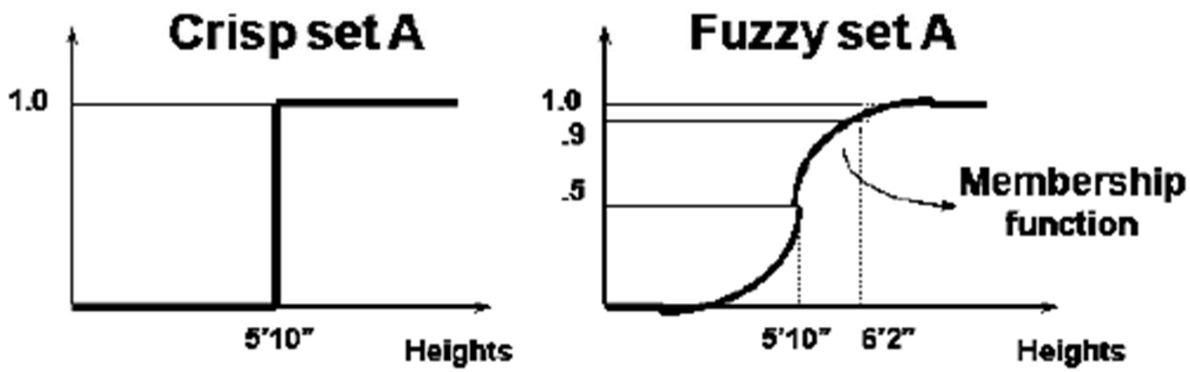
روشهای استنتاج فازی

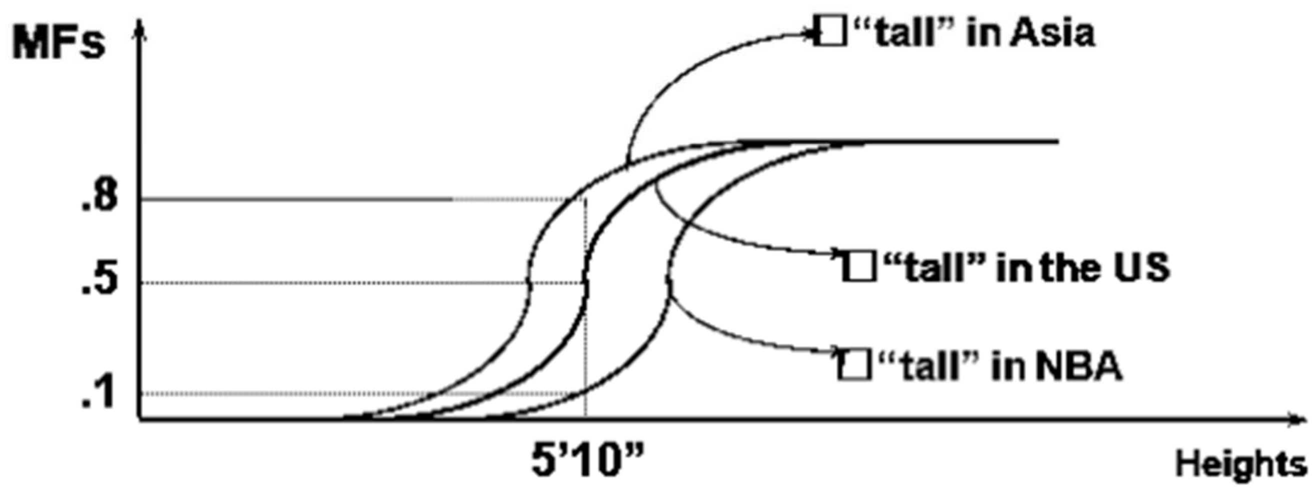
یک مجموعه فازی می تواند مجموعه افراد قد بلند باشد.

A = Set of tall people



مثلا افرادی که قد آنها بیشتر از*5'10* است قدبلند هستند. یکی از خصوصیات دیدگاه فازی این است که توابع عضویت *subjective* هستند و *objective* نیستند و این یکی از ایراداتی بود که در ابتدا بر مجموعه های فازی وارد می شد. در حالی که خود *subjective* بودن نقطه مثبت مجموعه های فازی محسوب می شود، چون این توانایی را دارند که از دانش انسانی بهره برداری کنند و دانش انسانی *subjective* است.

یکی از خواص دیگر این است که تعریف مجموعه های فازی ممکن است در جاهای مختلف با هم فرق کند. برای همین *subjective* است. مثلا مجموعه افراد قدبلند در آمریکا و آسیا، متفاوت است.

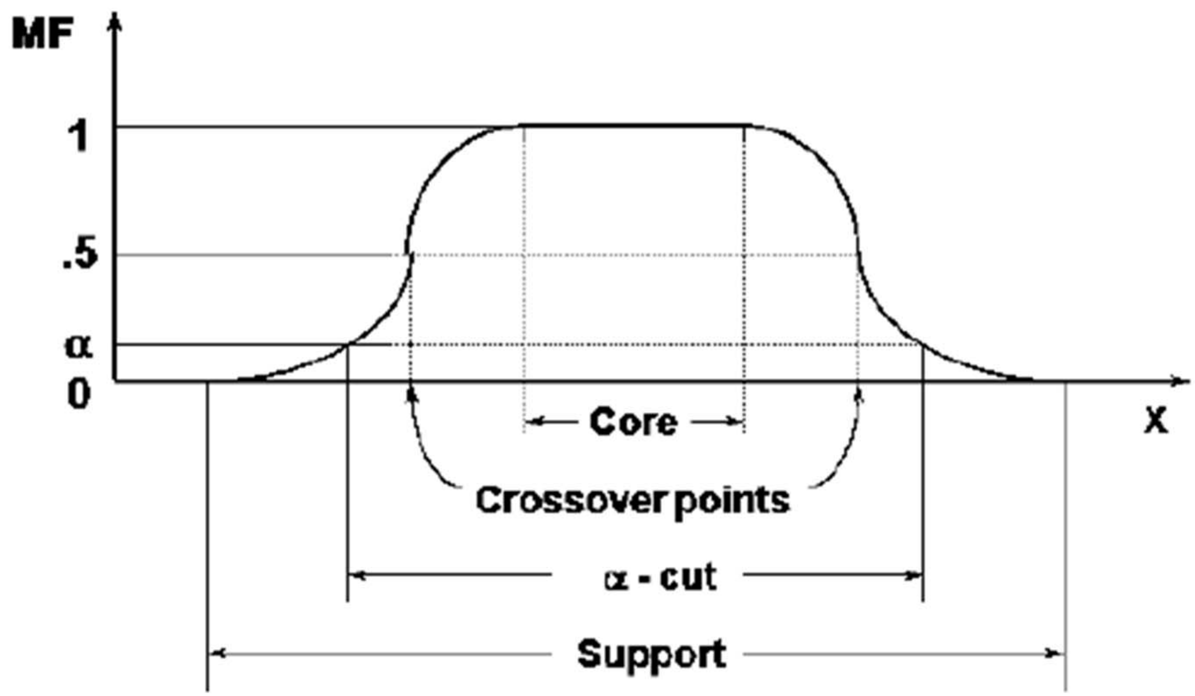


هسته : مجموعه ای از x ها که کاملاً به آن مجموعه تعلق دارد.

پشتیبان : بازه ای از $universe$ که به میزانی بیشتر از صفر به A تعلق داشته باشند.

نقطه تبدیل : آنهایی که هم به A تعلق دارند و هم به A تعلق ندارد. یعنی به همان میزان که به A تعلق دارد به همان میزان هم به A تعلق ندارد.

مجموعه ای است از x ها که به میزان α یا بیشتر به A تعلق داشته باشد. (یک مجموعه $crisp$ است)

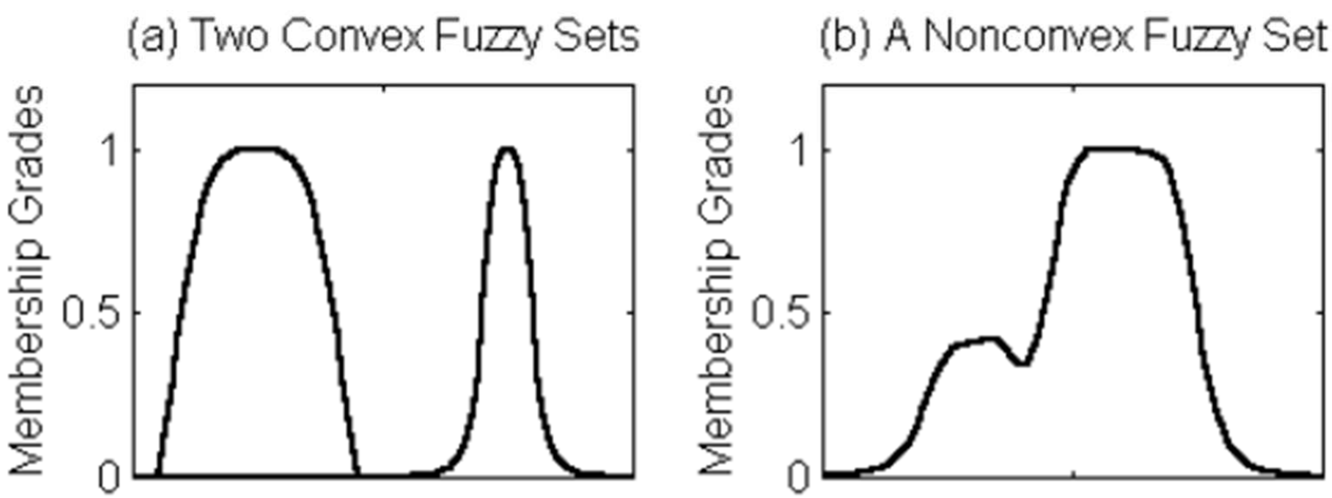


ساده ترین تعریف این است که مجموعه فازی محدب است، اگر و فقط اگر تمامی $\alpha - cut\ set$ های آن محدب باشند. چون $\alpha - cut\ set$ ها $crisp$ هستند، بنابراین این تعریف بسیار شفاف است.

تعریف دیگرمحدب بودن:

مجموعه فازی A محدب است اگر بازای هر λ در بازه $[0,1]$ داشته باشیم:

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$$



زیرمجموعه بودن :

اگر به ازای جمیع x هایی که به A تعلق دارد به مقدار بیشتری به B تعلق داشته باشد، آنگاه می گوئیم A زیرمجموعه B است.

$$A \subseteq B \qquad \mu_A \leq \mu_B$$

مکمل

آن عضوی که به میزان M_A به A تعلق دارند به میزان $1\text{-}M_A$ به A تعلق ندارد.

$$\overline{A} = X - A \Leftrightarrow \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

اجتماع

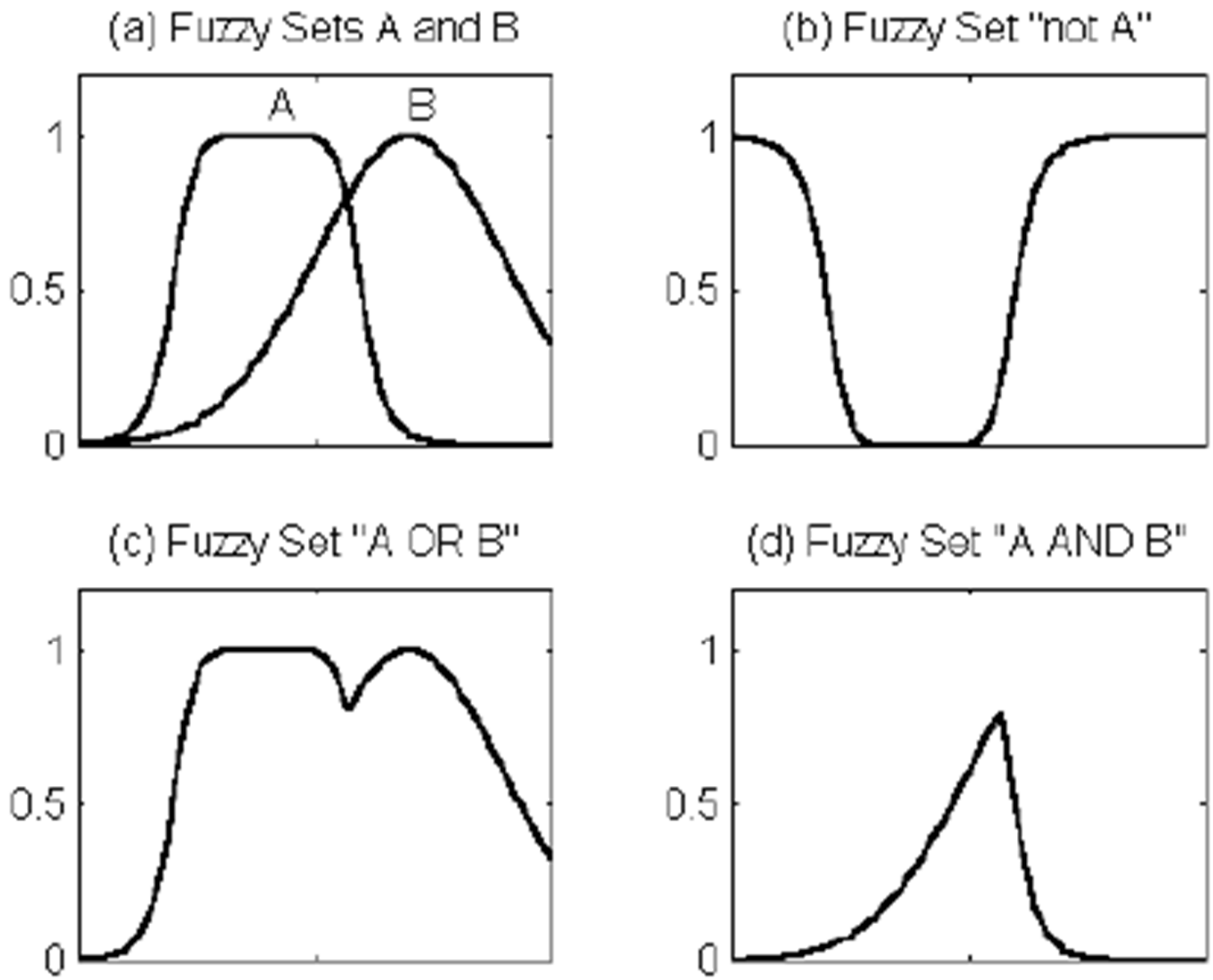
از ماکزیمم استفاده می کنیم. اجتماع باید هم A و هم B را در بر بگیرد، به گونه ای که A باید زیرمجموعه $A \cup B$ باشد. مقادیر دیگری هم غیر از ماکزیمم می تواند باشد.

$$C = A \cup B \Leftrightarrow \mu_c(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

اشتراک

از مینیمم استفاده می کنیم.

$$C = A \cap B \Leftrightarrow \mu_c(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$


(a) Fuzzy Sets A and B
A
B
1
0.5
0
(b) Fuzzy Set "not A"
1
0.5
0
(c) Fuzzy Set "A OR B"
1
0.5
0
(d) Fuzzy Set "A AND B"
1
0.5
0

مثلثی : سه نقطه لازم است که این تابع تعریف شود. (a,b,c)

$$trimf(x;a,b,c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b} \right), 0 \right)$$

ذوزنقه ای : چهار نقطه نیاز دارد. (a, b, c, d)

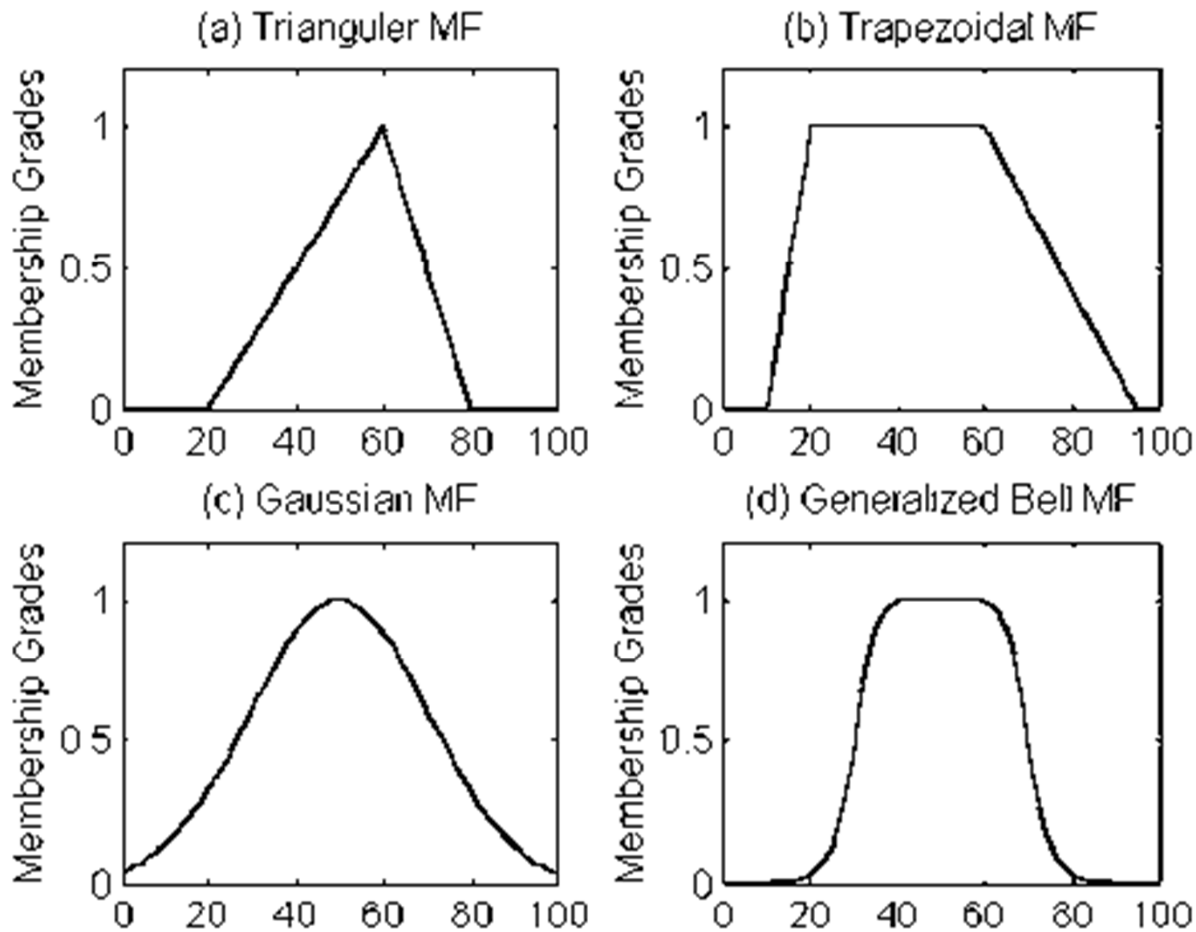
$$trapmf(x;a,b,c,d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c} \right), 0 \right)$$

گوسین : دو پارامتر دارد. مرکز c و بازه a را تعریف می کنید. a در حقیقت *standard deviation* نیست. a میزان باز یا بسته بودن تابع عضویت است.

$$gaussmf(x;a,b,c) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

تابع بل تعمیم یافته : سه تا پارامتر لازم دارد.

$$gbellmf(x;a,b,c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{b} \right|^{2b}}$$


(a) Trianguler MF
Membership Grades
0
0.5
1
0
20
40
60
80
100
(b) Trapezoidal MF
Membership Grades
0
0.5
1
0
20
40
60
80
100
(c) Gaussian MF
Membership Grades
0
0.5
1
0
20
40
60
80
100
(d) Generalized Bell MF
Membership Grades
0
0.5
1
0
20
40
60
80
100

مشکل تابع عضویت گوسین :

هیچگاه به صفر نمی رسد؛ در حالی که وقتی بخواهیم دمای گرم را تعریف کنیم، بازه خاصی مدنظر است و می-خواهیم در یک حالتی اصلاً این قانون مورد توجه نباشد. مثلا در زمانی که دما ^{o}C ۲۰- است نمی خواهیم به میزان ۰/۰۰۰۱ قطعیت داشته باشد.

در جاهایی که مبتنی بر دانش انسان است (پایگاه داده مبتنی بر دانش انسان) بیشتر از ساختارهای مثلثی یا ذوزنقه ای استفاده می کنیم و در جاهایی که مبتنی بر دانش انسانی نیست (به صورت زیاد) از تابع عضویت گوسین و G-$bell$ استفاده می کنیم.

مزایای تابع عضویت گوسین:

مزیت تابع عضویت گوسین آن است که مشتق آن ساده بوده و فرم خودش را دارد. به روش های دیگری هم می‌توان توابع عضویت را ایجاد کرد مثل *sigmoidal*:

$$sigmf(x;a,b,c)=\frac{1}{1+e^{-a(x-c)}}$$

ترکیب Max-Min (composition):

Max-Min Composition دو رابطه فازی R_1 و R_2 به صورت زیر تعریف می گردند.

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x,z) = \vee_y [\mu_{R_1}(x,y) \wedge \mu_{R_2}(y,z)]$$

ترکیب Max-product:

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x,z) = \vee_y [\mu_{R_1}(x,y)\mu_{R_2}(y,z)]$$

و بطور کلی برای Max-Star داریم:

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x,z) = \vee_y [\mu_{R_1}(x,y) * \mu_{R_2}(y,z)]$$

قوانین اگر-آنگاه فازی

دو نگرش برای قوانین فازی وجود دارد: نگرش کلاسیک، نگرش مدرن

۱. نگرش کلاسیک: می گوید که کلا منطق فازی تعمیم یافته منطق کلاسیک است. با این دیدگاه علاقمندیم هر آنچه در منطق کلاسیک داریم را تعمیم دهیم. مثل مودس پوننس، مودس تولنس و .... در این دیدگاه $p \to q$ یا حقیقت دارد یا باطل است.

۲. نگرش دوم: می گوید، وقتی می گوییم $p \to q$، منظور این است که اگر p بود آنگاه q ولی اگر p نبود این قانون را فراموش کن. فقط $p \to q$ زمانی معتبر است که p وجود داشته باشد در جاهای دیگر انگار وجود نداشته یا $don't\ care$ است.

استنتاج فازی $(Fuzzy\ Reasoning)$

در مودس پونتس کلاسیک اگر داشته باشیم $A \to B$ و A موجود نباشد، اگر A' به اندازه ε با A فرق داشته باشد هیچ چیزی نمی توان گفت.

قابلیت استنتاج تقریبی در فازی مطرح می شود. یعنی به میزانی که A' به A نزدیک باشد B' نیز به B نزدیک است. این یک قانون بسیار ارزشمند است. چرا؟ زیرا در طبیعت امکان ندارد بتوان تمام حالات ممکن را پیش بینی کرد. در حقیقت به میزانی که A و A' با هم تطبیق دارند B آتش می شود.

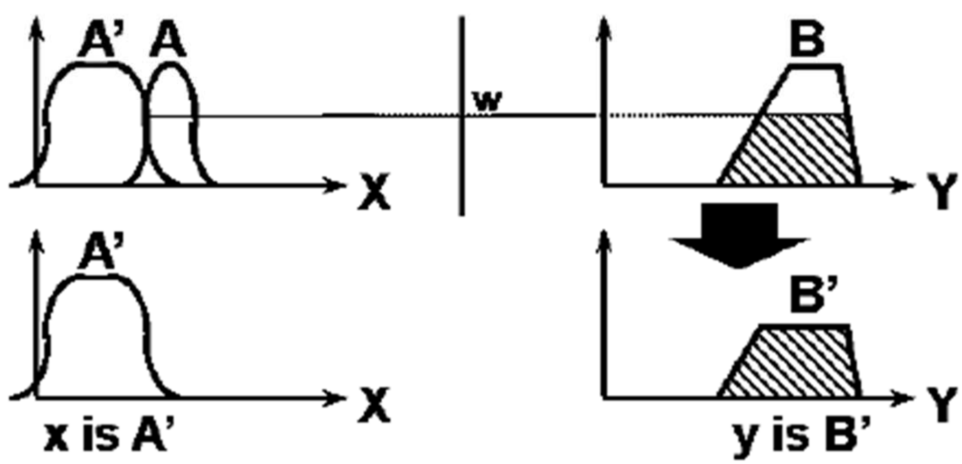
این همان قدرت فازی است که با دو قانون می توان به $resolution$ ای رسید که با یک میلیون قانون در سیستم خبره نمی توان به آن دست یافت.

یک قانون با یک مقدم

Rule: if x is A then y is B

Fact: x is A'

Conclusion: y is B'

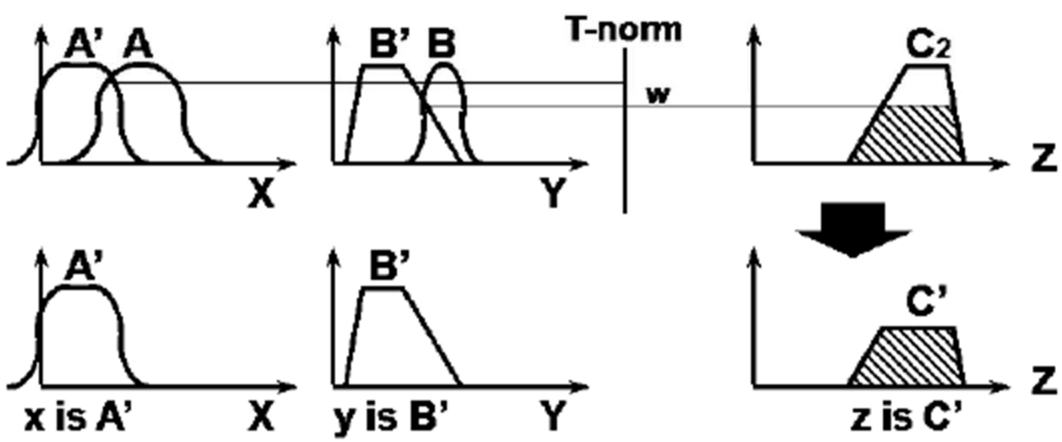


یک قانون با چند مقدم:

Rule: if x is A and y is B then z is C

Fact: x is A' and y is B'

Conclusion: z is C'



چند قانون با چند مقدم:

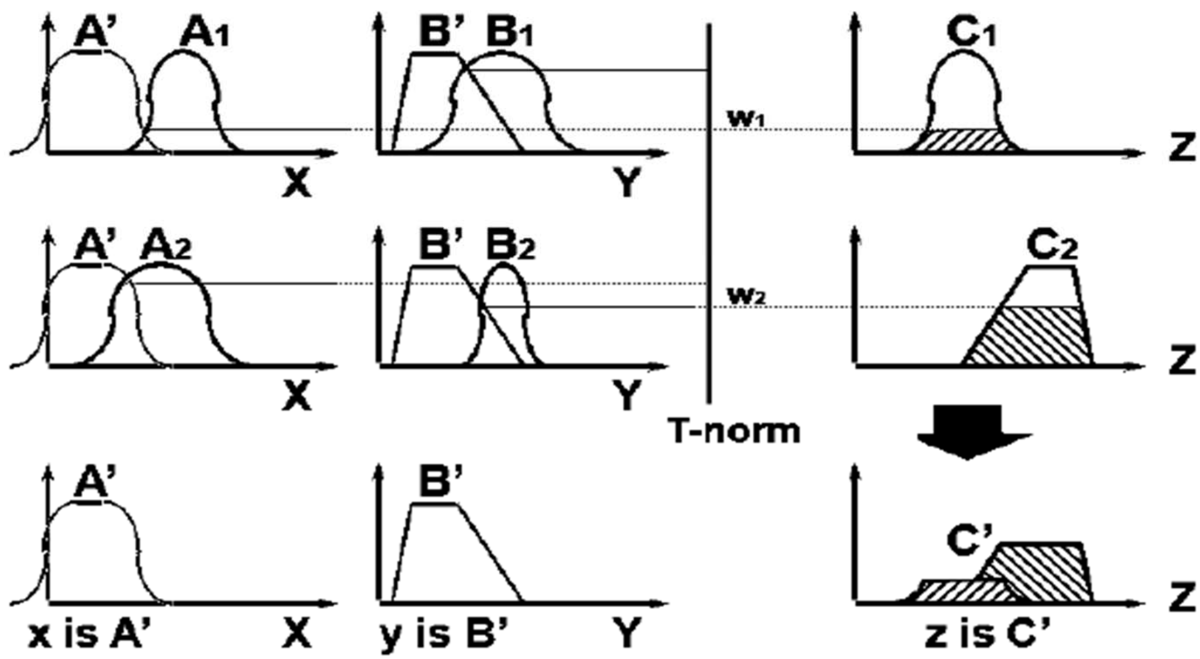
if x is A_1 and y is B_1 then z is C_1

if x is A_2 and y is B_2 then z is C_2

Fact: x is A' and y is B'

Conclusion: z is C'

در صورتی که بیش از یک قانون وجود داشته باشد، برای هر یک، خروجی را همانند بالا بدست آورده و در نهایت اجتماع آنها را بدست می آوریم.



قوانین اگر- آنگاه فازی دو نوع هستند:

۱. *Mamdani* : قسمت مقدم و تالی آن فازی است.

۲. *Sugeno* : قسمت تالی آن فازی نیست بلکه یک رابطه عددی است.

- نوع صفر
- نوع یک

$$y = \overline{y}_i * 5 + x_i$$

- نوع دو

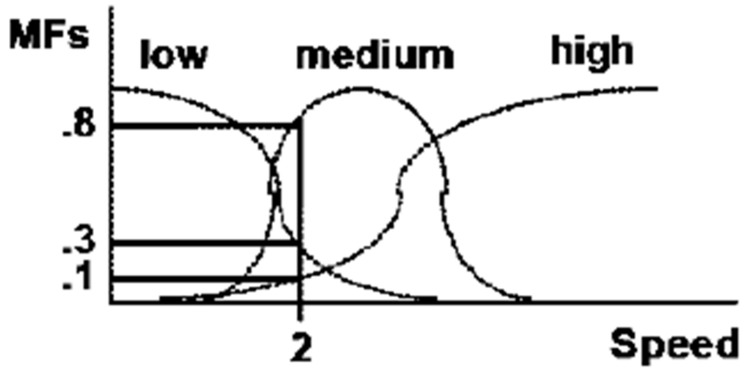
$$y = \overline{y}_i + 5 * x^2{}_i$$

مثال:

If speed is low then resistance = 2

*If speed is medium then residence =4*speed*

*If speed is high then resistance = 8*speed*



Rule 1:w1=.3; r1=2

*Rule 2:w2=.8; r2=4*4*

*Rule 3=w3=.1; r3=8*2*

$\rightarrow Resistance = \sum (w_i * n_i) / \sum w_i = 7.12$

ممدانی از نوع *center average defuzzifier* معادل با *TSK* نوع صفر می باشد.